2025年度　実力試験

基礎問題

2026 年 1 月 22 日（木）
13:00 〜 14:00　(60 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 3 題ある．全ての問題に解答すること．
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し，解答した問題番号を所定の欄に明記すること．問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない．
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，解答用紙は 3 枚とも提出すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．但しその旨を表面に明記すること．
- 途中退出は不可とする．

1 以下の問に答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．但し，a は定数とする．

(a) A の固有値を求めよ．

(b) A を対角化せよ．なお，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P も求めること．

(2) 実数係数の 2 次以下の多項式全体のなすベクトル空間

$$\mathbb{R}[x]_2 = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,\middle|\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考える．$\mathbb{R}[x]_2$ 上の内積 $(\cdot, \cdot)$ を

$$(f, g) = \int_{-2}^{2} f(x) g(x)\, dx \qquad (f, g \in \mathbb{R}[x]_2)$$

により定義する．$\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $1, x, x^2$ からグラム・シュミットの直交化法を用いて，この内積に関する正規直交基底を構成する．順次得られる多項式を $f_k = f_k(x)\,(k = 0, 1, 2)$ とするとき，f_0, f_1, f_2 を求めよ．

2 以下の問に答えよ.

(1) 以下の (a) – (f) の主張のうち，真であるものをすべて答えよ．結果のみでよい.

(a) 1 変数関数 $y = f(x)$ が点 $x = a$ で微分可能ならば，点 $x = a$ で連続である.

(b) 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が点 (a, b) で x, y について偏微分可能ならば，点 (a, b) で連続である.

(c) 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が定義域上で C^1 級ならば，各点で全微分可能である.

(d) 1 変数関数 $y = f(x)$ が有界な閉区間 $[a, b]$ 上で連続ならば，最小値をもつ.

(e) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ は発散する.

(f) α を実数とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ が収束するための必要十分条件は $\alpha < -1$ である.

(2) 曲線

$$y = \cosh x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

の長さを求めよ.

(3) 以下の問に答えよ.

(a) 関数

$$f(x) = \log(1 + \sin x)$$

の $x = 0$ におけるテイラー展開を 3 次の項まで求めよ．剰余項は書かなくてよい.

(b) 極限値

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\log(1 + \sin x)} - \frac{1}{x} \right)$$

を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ x を独立変数，y を従属変数とする微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (*)$$

について，以下の問に答えよ．

(1) $(*)$ の解 $y = y(x)$ に対して，$z(x) = y(x)e^{-x}$ とおく．$\dfrac{d^2z}{dx^2}$ を求めよ．

(2) $(*)$ の一般解を求めよ．

(3) x を独立変数，y を従属変数とする微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

の一般解を求めよ．