2025年度　実力試験

専門問題

2026 年 1 月 22 日（木）
14 : 15 〜 15 : 45 (90 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 10 題ある．そのうち 3 題 を選択して答えよ．
  但し，次の A, B から，それぞれ 1 題以上を選択すること．
  - A．解析学 II ＋解析学 IIB，解析学 III，応用初等代数＋代数学 I，集合と位相，複素解析 I，確率統計（以上 6 題）
  - B．幾何学 I ＋幾何学 II，代数学 II，解析学 IV，微分方程式 II ＋フーリエ解析（以上 4 題）
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し，選択した問題番号を所定の欄に明記すること．問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない．
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，解答用紙はすべて提出すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．但しその旨を表面に明記すること．
- 試験開始から 30 分経過した後は，解答用紙を提出の上，退出を認める．

$\boxed{\mathbf{1}}$ （A．解析学 II ＋解析学 IIB）

閉区間 $[0, 1]$ 上の関数列 $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{x^2 + n^2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を考える．

(1) $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に一様収束しているか？

(3) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ を求めよ．答のみではなく，その導出の過程を明らかにすること．

$\boxed{\mathbf{2}}$ （A．解析学 III）

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続微分可能な関数とする．$\mathbb{R}^3$ 上の曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \leq t \leq b)$ は，微分方程式

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = f(r)\boldsymbol{r} \quad (a < t < b)$$

を満たすとする．但し，$r = |\boldsymbol{r}|$ である．$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{d}{dt}|\boldsymbol{v}|^2$ を求め，C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C f(r)\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{v}$ を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ は定ベクトルであることを示せ．

(3) f が $f(0) = 1$ と

$$\nabla f(r) = f(r)\boldsymbol{r} \quad (\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0})$$

を満たすとき，$f(r)$ を求めよ．但し，∇ はナブラ記号 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(4) f を (3) で求めた関数とするとき，C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C f(r)\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

3 （A．応用初等代数＋代数学 I）

以下の問に答えよ．

(1) G を群とし，H を G の部分群とする．このとき，$g \in G$ に対し，

$$gHg^{-1} = \left\{ ghg^{-1} \,\middle|\, h \in H \right\}$$

は G の部分群であることを示せ．

(2) $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ とし，4 次対称群 $S_4 = \left\{ \sigma : X_4 \to X_4 \,\middle|\, \sigma \text{ は全単射 } \right\}$ および S_4 の部分集合

$$F_4 = \left\{ \sigma \in S_4 \,\middle|\, \sigma(4) = 4 \right\}$$

を考える．F_4 が S_4 の部分群であることを示せ．また，F_4 が S_4 の正規部分群であるかどうか判定せよ．

(3) S_n を n 次対称群とし，$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ をそれぞれ長さ λ_1, λ_2 の巡回置換とする．σ_1 と σ_2 が互いに素であるとき，$\sigma = \sigma_1\sigma_2$ の位数が λ_1 と λ_2 の最小公倍数に等しいことを証明せよ．

4 （A．集合と位相）

(X, d) を距離空間とする．このとき，以下の主張は成り立つか．常に成り立つ場合は証明し，必ずしも成り立たない場合は反例を挙げよ．

(1) 次で定義された $\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ は X 上の距離関数である．

$$\widetilde{d}(x, y) := d(x, y)^2 \qquad (x, y \in X)$$

(2) X の部分集合 A が $A^\circ = \emptyset$ を満たすならば，$A = \emptyset$ である．但し，A° は A の内部を表す．

(3) 任意の $x \in X$ に対して，$B := \{y \in X \mid d(x, y) < 1\}$ は (X, d) の開集合である．

(4) $f : X \to X$ が連続写像であるとき，X の部分集合 C がコンパクトならば $f^{-1}(C)$ もコンパクトである．

5 （A．複素解析 I）

ξ を正の実数とするとき，定積分 $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-2i\xi x} dx$ の値を求めたい．

そこでまず $f(z) = e^{-z^2}$ とする．次に R を正の実数とし，複素平面上の 4 点 $-R$, R, $R+\xi i$, $-R+\xi i$ をそれぞれ A, B, C, D として，この長方形の周に沿った複素線積分を考える．

点 A を始点とし点 B を終点とする線分を AB で表し，同様に向きの付いた線分 BC, CD, DA を定める．

(1) $\left|\displaystyle\int_{\mathrm{BC}} f(z)\,dz\right| \leq \xi\, e^{\xi^2} e^{-R^2}$ と $\left|\displaystyle\int_{\mathrm{DA}} f(z)\,dz\right| \leq \xi\, e^{\xi^2} e^{-R^2}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\mathrm{CD}} f(z)\,dz$ の値を I と ξ を用いて表せ．

(3) I の値を求めよ．必要ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ であることを証明なしで用いてよい．

6 （A．確率統計）

ド・モワブル-ラプラスの定理（中心極限定理）を用いて，以下の問に答えよ．但し，標準正規分布に従う確率変数 T に対して，$|T| \geqq 1.96$ の確率 $P(|T| \geqq 1.96)$ がほぼ 0.05 であること，$|T| \geqq 2.58$ の確率 $P(|T| \geqq 2.58)$ がほぼ 0.01 であることを用いてよい．

(1) あるテレビ番組の視聴率調査を 900 人を対象に行ったところ 20% であった．母集団全体での視聴率に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ．

(2) あるサイコロを 500 回振ったところ 6 が 101 回出た．このサイコロは 6 が出やすいと言ってよいか．検定すべき帰無仮説を述べて，危険率 5% および 1% で検定せよ．

7　（B．幾何学 I ＋幾何学 II）

空間において，実数パラメータ u, v により表される曲面 Σ

$$\begin{cases} x &= \sqrt{3}\sinh u\cos v - \cosh u\sin v \\ y &= \sqrt{3}\sinh u\sin v + \cosh u\cos v \\ z &= \sqrt{3}v + u \end{cases}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) Σ が曲面片であることを確かめよ．

(2) ガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ．

(3) $(u, v) = (0, \frac{\pi}{3})$ で表される点 P における接平面の方程式を求めよ．

8　（B．代数学 II）

以下の問に答えよ．

(1) ガウス整数環 $\mathbb{Z}[i]$ において $33-4i$ の素元分解を求めよ．

(2) (a) R, R' を環とする．$\varphi : R \to R'$ が環準同形写像であるなら，R, R' の零元をそれぞれ 0_R, $0_{R'}$ としたとき $\varphi(0_R) = 0_{R'}$ が成り立つことを示せ．

(b) 可換環 R の部分集合 I がイデアルであることの定義を書け．

(c) $\varphi : R \to R'$ が可換環の準同形写像であるなら，φ の核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は R のイデアルであることを示せ．必要ならば，任意の $r' \in R'$ に対して $r'\,0_{R'} = 0_{R'}$ が成り立つことを証明なしで用いてよい．

9 （B．解析学 IV）

ルベーグ積分における収束定理を利用して，以下の値を求めよ．但し，用いた収束定理の内容と，定理が適用できる理由を述べること．

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\log x)^k}{k!\,x^3}\,dx$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x^2+x\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)dx$

10 （B．微分方程式 II ＋フーリエ解析）

2 変数の関数 $u:[0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対する熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\quad 0<t<+\infty,\ -\infty<x<+\infty$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 任意の整数 n に対して適当な関数 $\phi_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ をとると，関数

$$u_n:(t,x)\mapsto\phi_n(t)e^{inx}$$

がひとつの解となることを示せ．$\phi_n(t)$ の具体的な形も求めること．

(2) (1) の結果を用いて，初期条件

$$u(0,x)=(2\cos x)^3,\quad -\infty<x<+\infty$$

を満たす解を見出せ．